第 2 节 比较指、对数的大小：构造函数（★★★★）

内容提要

本节内容高考考得较难，所以本节诸多题目难度较高.

有的比较大小的题，所给数据非常接近，不易于通过简单的估算，或找一些中间量来比较大小，需要通过构造函数来解决问题，常见的题型可分为两类：

1．基于结构：要比较的数据结构相同，或可以通过变形化为相同（有的需要简单放缩），我们可以从结构出发，构造函数比较大小.

2．基于数字：要比较的数据结构不同，但某个数字多次重复出现，这种情况我们可以考虑把重复出现的数字换成 x，构造函数比较大小.

典型例题

类型Ⅰ：基于结构来构造函数比较大小

【例 1】设 $a=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$，$b=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}$，$c=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$c>a>b$　　（B）$c>b>a$　　（C）$a>c>b$　　（D）$a>b>c$

解析：因为 a，b，c 都是指数且形式结构相同，考虑构造函数，观察它们的底数和指数，可以发现 a，c 指数相同，可构造幂函数比较，b，c 底数相同，可构造指数函数比较，

因为 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，所以 $f(\frac{1}{2})>f(\frac{1}{3})$，即 $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}>(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$，故 $a>c$；

因为 $g(x)=(\frac{1}{3})^{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘，所以 $g(\frac{1}{2})<g(\frac{1}{3})$，即 $(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}<(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$，故 $b<c$；所以 $a>c>b$．故选 C.

答案：C

【例 2】已知 $a=\frac{\ln 3}{3}$，$b=\frac{\ln 2}{2}$，$c=\frac{1}{\mathrm{e}}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$a>c>b$　　（B）$b>c>a$　　（C）$c>a>b$　　（D）$c>b>a$

解析：a，b 的结构相同，对于 c，只要将其化为 $\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}$，就能与 a，b 统一，故可构造函数分析，

设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $a=f(3)$，$b=f(2)$，$c=f(\mathrm{e})$，因为 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\mathrm{e}$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x>\mathrm{e}$，故 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上↗，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上↘，

自变量 3，2，e 不在同一个单调区间上，怎么办呢？那就化到同一个单调区间上去，

注意到 $b=f(2)=\frac{\ln 2}{2}=\frac{2\ln 2}{4}=\frac{\ln 4}{4}=f(4)$，又 $\mathrm{e}<3<4$，所以 $f(\mathrm{e})>f(3)>f(4)=f(2)$，故 $c>a>b$.

答案：C

【例 3】（2020•新课标Ⅰ卷）若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$，则（　　）

（A）$a>2b$　　（B）$a<2b$　　（C）$a>b^2$　　（D）$a<b^2$

解析： 所给等式左右两侧结构类似，但又不完全相同，所以尝试让形式结构相同，左边已经很简单了，考虑将右边朝左边的结构转化，$4^b+2\log_4 b=2^{2b}+2\log_{2^2} b=2^{2b}+\log_2 b=2^{2b}+\log_2(2b)-1$，

此时除了 -1，其余部分与左侧结构相同，所以丢掉 -1，让两侧结构完全一致，构造函数分析，

由题意，$2^a+\log_2 a=2^{2b}+\log_2(2b)-1<2^{2b}+\log_2(2b)$，设 $f(x)=2^x+\log_2 x(x>0)$，则 $f(a)<f(2b)$，

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，所以 $a<2b$.

答案： B

【例 4】（2022・全国甲卷）已知 $9^m=10$，$a=10^m-11$，$b=8^m-9$，则（　　）

（A）$a>0>b$　　（B）$a>b>0$　　（C）$b>a>0$　　（D）$b>0>a$

解析： 先观察 a，b 的共同点，它们的指数部分都是 m，减的数都是底数加 1，可将 a 调整为 10^m-10-1，把 b 调整为 8^m-8-1，则两式的差异就只是把 10 换成了 8，从而联想到构造函数 $y=x^m-x-1$，

因为 $9^m=10$，所以 $m=\log_9 10$，显然 $m>1$，

设 $f(x)=x^m-x-1(x>1)$，则 $a=f(10)$，$b=f(8)$，且 $f(9)=9^m-10=0$，

所以要比较 a，b，0 的大小，只需比较 $f(10)$，$f(9)$，$f(8)$ 的大小，下面先求导研究 $f(x)$ 的单调性，

易求得 $f'(x)=mx^{m-1}-1$，$f''(x)=m(m-1)x^{m-2}>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上↗，

又 $f'(1)=m-1>0$，所以 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上↗，故 $f(10)>f(9)>f(8)$，所以 $a>0>b$.

答案： A

【总结】基于相同结构构造函数，是构造的题型之一，有的题本身就有相同的结构（如例 1），有的简单变形即可同构（如例 2），有的同构前需要简单放缩（如例 3），还有的同构形式则较为隐蔽（如例 4）.

类型Ⅱ：基于数字来构造函数比较大小

【例 5】设 $b=\dfrac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则 b_____c.（填“$>$”或“$<$”）

解析： b，c 的结构不同，所以从数字入手分析，先将 c 也调整为含 $\dfrac{1}{9}$ 的结构，

由题意，$c=-\ln 0.9=-\ln\dfrac{9}{10}=\ln\dfrac{10}{9}=\ln(1+\dfrac{1}{9})$，

数字 $\dfrac{1}{9}$ 在 b，c 中都有出现，将其看成 x，则 $b=x$，$c=\ln(1+x)$，由此联想到经典切线放缩不等式，

我们知道，$\ln x\le x-1$，取等条件是 $x=1$，将 x 换成 $1+x$ 可得 $\ln(1+x)\le x$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，

令 $x=\dfrac{1}{9}$ 可得 $\ln(1+\dfrac{1}{9})<\dfrac{1}{9}$，所以 $c<b$.

答案： $>$

【反思】有的比大小问题，命制的思路就是在诸如 $\ln x\le x-1$，$e^x\ge x+1$ 等经典切线放缩不等式中将 x 换

成一些切点附近的数字. 例如，在 $e^x \ge x+1$ 中取 $x=0.1$，又可以命制出比较 $e^{0.1}$ 与 1.1 大小的题目.

【变式】(2022·新高考Ⅰ卷）设 $a=0.1e^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$c<b<a$　　（C）$c<a<b$　　（D）$a<c<b$

解析： a，b，c 的结构不同，所以从数字入手分析，先比较 a 和 b，a 中的 0.1 和 b 中的 $\frac{1}{9}$ 有什么联系？事实上，$\frac{1}{9}=\frac{0.1}{0.9}=\frac{0.1}{1-0.1}$，数字 0.1 多次出现，把 0.1 换成 x，则 $a=xe^x$，$b=\frac{x}{1-x}$，$\frac{a}{b}=(1-x)e^x$，所以只需比较 $(1-x)e^x$ 与 1 的大小，从而构造函数 $f(x)=(1-x)e^x$，注意到 $f(0)=1$，故只需比较 $f(0.1)$ 和 $f(0)$，

设 $f(x)=(1-x)e^x(x\ge 0)$，则 $f'(x)=-xe^x\le 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上↘，所以 $f(0.1)<f(0)$，故 $0.9e^{0.1}<1$，

两端同时除以 9 可得 $0.1e^{0.1}<\frac{1}{9}$，所以 $a<b$；

由于 b 的结构简单，故再比较 b 和 c，比较过程见例 5，得到 $c<b$ 后，结合选项发现还需比较 a 和 c，观察数字，$c=-\ln 0.9=-\ln(1-0.1)$，故问题即为比较当 $x=0.1$ 时，xe^x 与 $-\ln(1-x)$ 的大小，从而构造函数 $g(x)=xe^x-[-\ln(1-x)]$，因为 $g(0)=0$，故可将定义域规定为 $[0,0.1]$，

设 $g(x)=xe^x+\ln(1-x)(0\le x\le 0.1)$，则 $g'(x)=(x+1)e^x-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-x}[(1-x^2)e^x-1]$，

此处提 $\frac{1}{1-x}$ 到外面是为了让 e^x 与其余含 x 的部分相乘，便于再求导研究中括号内那部分的单调性，

令 $h(x)=(1-x^2)e^x-1(0\le x\le 0.1)$，则 $h'(x)=(-x^2-2x+1)e^x>0$，所以 $h(x)$ 在 $[0,0.1]$ 上↗，

又 $h(0)=0$，所以 $h(x)\ge 0$，故 $g'(x)\ge 0$，从而 $g(x)$ 在 $[0,0.1]$ 上↗，

所以 $g(0.1)>g(0)$，即 $0.1e^{0.1}+\ln(1-0.1)>0$，也即 $0.1e^{0.1}>-\ln 0.9$，所以 $a>c$，故 $c<a<b$.

答案： C

【总结】 当要比较的数据结构不同时，可观察看是否存在某个数字多次重复出现的现象，若是，则可考虑把重复出现的数字换成 x，构造函数比较大小.

强化训练

1.（2022·浙江月考·★★★）已知 $a=2^{\frac{4}{5}}$，$b=4^{\frac{2}{7}}$，$c=25^{\frac{1}{5}}$，则（　　）

（A）$b<a<c$　　（B）$a<b<c$　　（C）$b<c<a$　　（D）$c<a<b$

2.（2022·江苏南通模拟·★★★）已知 $a=e-1$，$b=e^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{4}$，$c=4-\frac{1}{2\ln 2}$，则（　　）

（A）$b>c>a$　　（B）$a>c>b$　　（C）$c>b>a$　　（D）$c>a>b$

3.（2023 • 全国模拟 • ★★★）已知 $a=9\ln 10$， $b=8\ln 11$， $c=7\ln 12$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A） $c<a<b$　　（B） $b<a<c$　　（C） $a<b<c$　　（D） $c<b<a$

4.（2022 • 重庆月考 • ★★★）已知 $a=\frac{11}{10}$， $b=\ln 2$， $c=\mathrm{e}^{\frac{1}{10}}$，则（　　）

（A） $c>a>b$　　（B） $a>c>b$　　（C） $c>b>a$　　（D） $a>b>c$

5.（2022 • 全国甲卷 • ★★★★）已知 $a=\frac{31}{32}$， $b=\cos\frac{1}{4}$， $c=4\sin\frac{1}{4}$，则（　　）

（A） $c>b>a$　　（B） $b>a>c$　　（C） $a>b>c$　　（D） $a>c>b$

6.（2021 • 全国乙卷 • ★★★★）设 $a=2\ln 1.01$， $b=\ln 1.02$， $c=\sqrt{1.04}-1$，则（　　）

（A） $a<b<c$　　（B） $b<c<a$　　（C） $b<a<c$　　（D） $c<a<b$